Über die

Berechnung elektrostatischer Potentiale von Kreis- und Kugelkonduktoren, insbesondere von unendlichen Kreis- und Kugelgittern

---

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät der
Philipps-Universität zu Marburg

vorgelegt von

Hermann Walter
aus Riga

Marburg 1927

Tag der mündlichen Prüfung: 8. Juli 1925

Referent: Herr Professor Dr. E. Neumann

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck
aus „Zeitschrift für Physik", Bd. 39, Heft 12 und Bd. 40, Heft 3/4

Die vorliegende Arbeit behandelt die Berechnung ebener bzw. räumlicher Potentiale leitender Kreise bzw. Kugeln. Es kommt dabei auf das Verhalten der Potentiale in der Nähe der Kreisränder bzw. Kugeloberflächen an, und es soll auch die Dichte der induzierten Belegung bestimmt werden. Insbesondere werden Methoden zur Berechnung der Potentiale unendlich ausgedehnter Kreis- bzw. Kugelgitter angegeben werden. Den Ausgangspunkt bildete eine Marburger Dissertation (E. Hermann, Über die Zurückführung elektrostatischer Potentiale von Kreis- und Kugelkonduktoren auf Punktpotentiale. Marburg 1924), nach welcher man durch ein Spiegelungsverfahren das Potential geladener Kreis- oder Kugelkonduktoren ersetzen kann durch das Potential von Punkten und kleineren mit elektrischer Ladung belegten Kreisen oder Kugeln. In meiner Arbeit wird im Anschluß an das Spiegelungsverfahren eine Methode zur Berechnung der Potentiale ausgearbeitet, mit anderen mathematischen Methoden (alternierendes Verfahren, Auflösung linearer Gleichungssysteme) in Zusammenhang gebracht und auf unendliche Kreis- und Kugelgitter angewandt. Die Arbeit zerfällt naturgemäß in zwei Teile: 1. Die Berechnung ebener Potentiale geladener Kreiskonduktoren. 2. Die Berechnung räumlicher Potentiale geladener Kugelkonduktoren.

I. Teil.

Ebene elektrostatische Potentiale von Kreiskonduktoren.

Zur Berechnung solcher Potentiale werde ich mich funktionentheoretischer Methoden bedienen und das Potential als den Realteil einer analytischen Funktion einer komplexen Veränderlichen suchen.

§ 1 enthält einen funktionentheoretischen Beweis des Spiegelungsverfahrens, an den sich die Methode zur Berechnung des Potentials zwanglos anschließt. Im § 2 wird diese Methode für ein beliebig vorgegebenes endliches Kreissystem skizziert und in andere Zusammenhänge eingeordnet. Im § 3 wird sie auf einige Fälle unendlich ausgedehnter Kreisgitter angewandt.

§ 1. Das Spiegelungsverfahren. Gegeben ist in der komplexen Z-Ebene ein System von m leitenden Kreisen K_i mit den Mittelpunkten z_i, den Radien R_i und den gegenseitigen Mittelpunktsabständen R_{ij}. Sie sollen sich weder schneiden noch berühren $\left(\frac{R_i + R_j}{R_{ij}} < 1\right)$ und sind mit den Ladungen e_i auf die Potentiale C_i geladen.

Wir setzen voraus, daß es eine analytische Funktion $V_{(z)}$ einer komplexen Veränderlichen

$$V_{(z)} = R_{(x,\,y)} + i \,.\, J_{(x,\,y)}$$

gibt, deren Realteil R das gesuchte Potential ist. $V_{(z)}$ selbst bezeichnen wir im folgenden als Potential. Man kann einige Eigenschaften, die es haben muß, sofort nennen:

1. $V_{(z)}$ ist im Außengebiet der Kreise regulär.

2. Der Realteil nimmt auf den Kreisrändern die konstanten Werte C_i an.

3. Beim positiven Umlauf eines Kreises K_i vermehrt sich der Imaginärteil um $-2\pi e_i$. Diese Eigenschaft drückt aus, daß der Kreis K_i mit der Ladung e_i geladen ist.

4. Im unendlich fernen Punkt verhält sich $V_{(Z)}$ wie das Potential der in den Kreismittelpunkten konzentrierten Ladungen der einzelnen Kreise, also wie die Funktion:

$$\sum_1^m{}^i e_i \ln \frac{1}{z - z_i}$$

oder wie die Funktion:

$$-\left(\sum_1^m{}^i e_i\right) \ln \frac{1}{\zeta} \qquad \text{im 0-Punkt.}$$

Wir sagen $V_{(z)}$ habe im Unendlichen eine logarithmische Singularität mit dem Residium:

$$-\sum_1^m{}^i e_i.$$

(Als Residuum einer logarithmischen Singularität: $k \ln \frac{1}{z - z_0}$ definieren wir nach Cauchy den Faktor k.)

Mit Hilfe des Schwarzschen Spiegelungsprinzips kann man aus diesen Eigenschaften eine Reihe von Folgerungen ziehen und aus ihnen in sehr naheliegender Weise eine Methode zur Konstruktion der Funktion herleiten.

Das Spiegelungsprinzip lautet: Wenn eine analytische Funktion $\zeta = V_{(z)}$, deren Regularitätsgebiet G von dem Stück B eines Kreisbogens (bzw. einer Geraden) begrenzt wird, bei Annäherung an diesen Rand von innen her eine stetige Wertefolge annimmt, deren Bildpunkte in der ζ-Ebene auf dem Stück L eines Kreises (bzw. einer Geraden) liegen, so läßt sich die Funktion über dieses Randstück hinaus fortsetzen. Die fortgesetzte Funktion nimmt an den Punkten, die in der z-Ebene zu B spiegelbildlich liegen, Werte an, die in der ζ-Ebene zu L spiegelbildlich liegen, wenn man von B aus auf spiegelbildlichen Wegen fortsetzt [1]).

Die Funktion $\zeta = V_{(z)}$ ist nun im Außengebiet der Kreise regulär und nimmt auf ihren Rändern Werte mit konstantem Realteil an, deren Bildpunkte in der ζ-Ebene ($\zeta = \xi + i\eta$) auf parallel zur imaginären Achse verlaufenden Geradenstücken ($\xi = C_i$) liegen. Man kann also $V_{(z)}$ ins Innere eines Kreises K_i fortsetzen und muß dazu die Funktionswerte von $V_{(z)}$ im Außengebiet des Kreises an der Geraden $\xi = C_i$ spiegeln. Hierbei bleibt der Imaginärteil unverändert.

Da $V_{(z)}$ im unendlich fernen Punkt eine logarithmische Singularität mit dem Residuum $-\sum_1^m e_i$ hat, so hat die Fortsetzung im Spiegelpunkt des unendlich ferner Punktes (im Punkte z_i) eine logarithmische Singularität mit dem Residuum $+\sum_1^m e_i$. Da der Realteil von $V_{(z)}$ auf den Rändern der übrigen Kreise K_j die konstanten Werte C_j annimmt, so hat die Fortsetzung auf den Rändern ihrer Spiegelbilder die konstanten Realteile $2C_i - C_j$, die man erhält, indem man C_j an der Geraden $\xi = C_i$ spiegelt. Umläuft man K_j im positiven Sinne, so ändert sich der Imaginärteil um $-2\pi e_j$. Umläuft man sein Spiegelbild (in bezug auf K_i) im entsprechenden, also negativen Sinne, so ändert sich der Imaginärteil der Forsetzung um denselben Betrag, also bei positiver Umlaufsrichtung um $+2\pi e_j$.

[1]) Vgl. etwa A. Hurwitz und R. Courant, Funktionentheorie, S. 350, 1925.

Man kann das Resultat so deuten: Das Potential des geladenen Kreiskonduktors K_i läßt sich ersetzen durch das Potential der Punktladung $+\sum_1^m e_i$ in seinem Mittelpunkt und einer Reihe von $(m-1)$ kleineren Kreiskonduktoren, welche durch Spiegelung der übrigen Kreise an K_i entstanden sind und die entgegengesetzt gleichen Ladungen tragen. Wir nennen diese Ladungen „gespiegelt". Die Gesamtladung dieses Ersatzsystems ist natürlich e_i.

Dieser Prozeß der Einführung von Ersatzsystemen läßt sich in jedem Kreise ad infinitum fortführen. Man macht das am besten so, daß man sich die erste Fortsetzung in allen Kreisen außer K_i durchgeführt denkt und die so bestimmte Funktion nach derselben Methode wie anfangs nach K_i hinein fortsetzt. Man kommt dann außer zur Punktladung $+\sum_1^m e_i$ im Mittelpunkt noch zu den Punktladungen $-\sum_1^m e_i$ in den Spiegelbildern der Mittelpunkte der übrigen Kreise und zu einem neuen System von $(m-1)^2$ kleineren Kreisen mit „gespiegelten" Ladungen. Dasselbe gilt für die übrigen Kreise, und nach derselben Methode kann man weiter fortfahren und kommt dabei zu immer weiteren Singularitäten bzw. Punktladungen und zu immer kleineren Kreisen, in welche sich $V_{(z)}$ immer weiter fortsetzen läßt.

Es liegt nahe, die Funktion V durch das Potential des erhaltenen Punktsystems auszudrücken, indem man etwa nach einem gewissen Grade der Reduktion die noch übrigbleibenden Kreise durch Punkte ersetzt. Durch die folgende Überlegung bilden wir uns einen systematischen Überblick über dieses Punktsystem.

Zwei entgegengesetzt gleiche Punktladungen, welche im Endlichen liegen, nennen wir einen „Dipol". Das Potential eines solchen Dipols verschwindet im Unendlichen. Wir erweitern den Begriff des Dipols, indem wir zulassen, daß eine seiner Punktladungen im Unendlichen liegen darf. Dann kann man auch eine im Endlichen liegende Punktladung als Dipol auffassen, dessen entgegengesetzte Ladung im Unendlichen liegt. Denn das Potential einer Punktladung im Endlichen hat im Unendlichen eine logarithmische Singularität von entgengesetztem Vorzeichen.

Wir denken uns nun die Ladungen der Kreise in ihren Mittelpunkten konzentriert. Dann haben wir ein System von m Dipolen. Die eine Ladung eines solchen Dipols liegt im Mittelpunkt des entsprechenden

Kreises, die andere im Unendlichen. Wir spiegeln dieses System an jedem der Kreise K_i, indem wir jedesmal den zum Spiegelkreise gehörigen Dipol auslassen. Bei der Spiegelung wechseln die Punktladungen ihr Vorzeichen. Das so entstandene zweite System wird dem ersten überlagert. Dann kommen im Kreise K_i zur Punktladung e_i noch $(m-1)$ Dipole hinzu, so daß im Mittelpunkt des Kreises die Gesamtladung $+\sum_1^m e_i$ ist und in den Spiegelbildern der Mittelpunkte der übrigen Kreise K_j die Ladungen $-e_j$ liegen. Das zweite System spiegeln wir ebenso an jedem Kreise und bekommen ein drittes, das wir dem ersten und dem zweiten überlagern usw. Schematisch könnte man das entstandene System in einem der Kreise, wie Fig. 1 zeigt, darstellen.

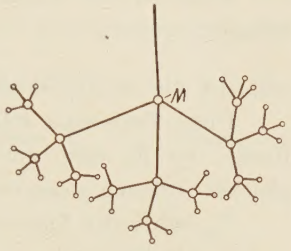

Fig. 1.

Die Strecken bedeuten Dipole, an deren Enden die Ladungen liegen. Vom Mittelpunkt des Kreises M weist ein Dipol ins Unendliche, die übrigen nach den Spiegelpunkten der Mittelpunkte der anderen Kreise. In den Verzweigungspunkten ist die Summe aller Ladungen konzentriert und zwar mit abwechselnd positivem und negativem Vorzeichen. An den äußersten Endpunkten liegen die Einzelladungen der entsprechenden Kreise mit einem Vorzeichen, das von der Zahl der Spiegelungen abhängt.

Dieses System stimmt mit dem früheren überein, das wir erhielten, indem wir nach einer Reihe von (3) Spiegelungen die Ladungen der noch übrigbleibenden kleinen Kreise durch Punkte ersetzten.

§ 2. Das Potential eines endlichen Kreissystems. Die Berechnung des Potentials eines endlichen Kreissystems geschieht in der Weise, daß man die Potentiale der eben beschriebenen Systeme von Dipolen übereinanderlagert.

Zuerst geben wir uns darüber Rechenschaft, welche Form das Resultat haben wird.

$V_{(z)}$ ist regulär in einem Kreisring um z_i, der den Rand von K_i enthält, und daher in folgende Reihe entwickelbar:

$$V_{(z)} = e_i \ln \frac{1}{z - z_i} + \sum_1^\infty{}^n A_{-n,i} \frac{R_i^n}{(z - z_i)^n} + \sum_0^\infty{}^n A_{n,i} \frac{(z - z_i)^n}{R_i^n}. \quad (1)$$

Der Faktor e_i des ersten Gliedes bestimmt die Ladung des Kreises.

Die erste Reihe ist regulär im ganzen Außengebiet von K_i, verschwindet im Unendlichen und stellt den „Hauptteil“ oder den Anteil des Kreises K_i an der Potentialfunktion dar.

Die zweite Reihe ist regulär im Innern von K_i und rührt von den Hauptteilen der anderen Kreise her.

Statt durch eine Reihenentwicklung, kann man V auch durch die Summe der Hauptteile darstellen:

$$V_{(z)} = \sum_1^m \left\{ e_i \ln \frac{1}{z - z_i} + \sum_1^\infty {}_n A_{-n,i} \frac{R_i^n}{(z - z_i)^n} \right\}. \qquad (1\,a)$$

Zwischen den Koeffizienten der Entwicklung (1) besteht die Beziehung:

$$A_{-n,i} = -\bar{A}_{n,i} \qquad (n \geqslant 1)$$

($\bar{A}_{n,i}$ ist die zu $A_{n,i}$ konjugiert — komplexe Größe).

Diese Beziehung folgt aus der Konstanz des Realteils auf dem Rande von K_i, dann müssen nämlich die Glieder von entgegengesetzt gleicher Ordnung zusammen den Realteil 0 haben ($n \geqslant 1$).

$V_{(z)}$ wird also folgende Form haben:

1. Als Entwicklung um einen Kreismittelpunkt z_i:

$$V_{(z)} = e_i \ln \frac{1}{z - z_i} - \sum_1^\infty {}_n \bar{A}_{n,i} \frac{R_i^n}{(z - z_i)^n} + \sum_0^\infty {}_n A_{n,i} \frac{(z - z_i)^n}{R_i^n}. \qquad (2)$$

2. Als Darstellung durch die Hauptteile:

$$V_{(z)} = \sum_1^m \left\{ e_i \ln \frac{1}{z - z_i} - \sum_1^\infty {}_n \bar{A}_{n,i} \frac{R_i^n}{(z - z_i)^n} \right\}. \qquad (2\,a)$$

Formal läuft die Aufgabe darauf hinaus, die Koeffizienten $A_{n,i}$ zu bestimmen.

Die Potentiale der einzelnen Systeme von Dipolen bestimmen wir folgendermaßen:

Das Potential des ersten Systems, nämlich der in den Mittelpunkten konzentrierten Ladungen der Kreise, ist:

$$V_{1(z)} = \sum_1^m e_i \ln \frac{1}{z - z_i}. \qquad (3)$$

Es hat um den Mittelpunkt z_i die Entwicklung:

$$V_{1(z)} = e_i \ln \frac{1}{z - z_i} + \sum_0^\infty {}_n a_{n,i} \frac{(z - z_i)^n}{R_i^n} \qquad (3\,a)$$

deren Koeffizienten leicht zu bestimmen sind.

Jetzt bilden wir die „erste Zusatzfunktion“:

$$Z_{1,\,i} = -\sum_{1}^{\infty n} \bar{a}_{n,\,i} \frac{R_i^n}{(z - z_i)^n}. \tag{4}$$

$Z_{1,\,i}$ ist das Potential derjenigen Dipole des ersten gespiegelten Systems, die in K_i liegen. Zum Beweise bilden wir die Summe: $V_1 + Z_{1,\,i}$ und sehen sofort, daß diese Summe auf dem Kreisrande einen konstanten Realteil hat. Denn der Realteil der Glieder:

$$a_{n,\,i} \frac{(z - z_i)^n}{R_i^n} - \bar{a}_{n,\,i} \frac{R_i^n}{(z - z_i)^n}, \qquad n \geqslant 1,$$

verschwindet auf dem Kreisrande. Sie läßt sich also ins Innere des Kreises fortsetzen, und man findet dort nach dem Spiegelungsprinzip eine Punktladung $+ \sum_{1}^{m i} e_i$ im Mittelpunkt und die Punktladungen $- e_j$ in den Spiegelbildern der Mittelpunkte der übrigen Kreise K_j. Die Summe der analog gebildeten Funktionen:

$$\sum_{1}^{m i} Z_{1,\,i\,(z)}$$

ist also das Potential des ersten gespiegelten Systems, und die Summe:

$$V_{2\,(z)} = V_{1\,(z)} + \sum_{1}^{m i} Z_{1,\,i\,(z)}$$

betrachten wir als zweite Annäherung für das gesuchte Potential.

Jetzt entwickeln wir $\sum_{1}^{m j}{}' Z_{1,\,j}$ um den Punkt z_i. Das Komma bedeutet, daß bei der Summierung das Glied $Z_{1,\,i}$ ausgelassen ist. Wir erhalten eine Reihe:

$$\sum_{1}^{m j}{}' Z_{1,\,j\,(z)} = \sum_{0}^{\infty n} a_{n,\,i}^{(1)} \frac{(z - z_i)^n}{R_i^n}$$

und bilden die zweite Zusatzfunktion:

$$Z_{2,\,i\,(z)} = -\sum_{1}^{\infty n} \bar{a}_{n,\,i}^{(1)} \frac{R_i^n}{(z - z_i)^n}. \tag{5}$$

Die Summe der zweiten Zusatzfunktionen ist das Potential des zweiten Systems gespiegelter Dipole, und

$$V_{3\,(z)} = V_{2\,(z)} + \sum_{1}^{m i} Z_{2,\,i\,(z)}$$

ist die dritte Annäherung für das gesuchte Potential. So fährt man weiter fort. Im Falle der Konvergenz erhält man für V folgende Reihe:

$$V_{(z)} = V_{1(z)} + \sum_1^\infty{}^n \sum_1^m{}^i Z_{n,i(z)}$$

$$= \sum_1^m{}^i \left\{ e_i \ln \frac{1}{z - z_i} - \sum_1^\infty{}^n \bar{A}_{n,i} \frac{R_i^n}{(z - z_i)^n} \right\}, \tag{6}$$

und um den Punkt z_i die Entwicklung:

$$V_{(z)} = e_i \ln \frac{1}{z - z_i} - \sum_1^\infty{}^n \bar{A}_{n,i} \frac{R_i^n}{(z - z_i)^n} + \sum_0^\infty{}^n A_{n,i} \frac{(z - z_i)^n}{R_i^n}. \tag{6a}$$

Hier sind die Koeffizienten $A_{n,i}$ und $\bar{A}_{n,i}$ durch die Reihen:

$$A_{n,i} = \sum_0^\infty{}^\nu a_{n,i}^{(\nu)} \text{ und } \bar{A}_{n,i} = \sum_0^\infty{}^\nu a_{n,\nu}^{(\nu)}$$

bestimmt. Das Resultat entspricht vollkommen unseren Erwartungen.

Die Rechnung besteht in der analytischen Fortsetzung von Potenzreihen, d. h. in ihrer Entwicklung um einen neuen Mittelpunkt. Das geschieht gliedweise und es kommen Glieder von der Form: $\ln \frac{1}{z - z_j}$ und $\frac{1}{(z - z_j)^\nu}$ in Betracht. Die Entwicklungen dieser Glieder um den neuen Mittelpunkt z_i lauten:

$$\ln \frac{1}{z - z_j} = \ln \frac{1}{z_i - z_j} + \sum_1^\infty{}^n \frac{1}{n} \frac{(z - z_i)^n}{(z_j - z_i)^n}. \tag{7}$$

$$\frac{1}{(z - z_i)^\nu} = \sum_0^\infty{}^n (-1)^n \binom{n + \nu - 1}{n} \frac{(z - z_i)^n}{(z_i - z_j)^{n+\nu}}. \tag{8}$$

Um die Konvergenzfrage zu entscheiden, wollen wir die eben durchgeführte Rechnung auf das alternierende Verfahren zurückführen, dessen Konvergenz bewiesen ist.

Wir beschränken uns auf die Realteile der benutzten Funktionen und können unsere Methode dann folgendermaßen beschreiben: Zuerst bildeten wir das Potential der in den Kreismittelpunkten konzentrierten Ladungen, welches auf dem Rande jedes Kreises gewisse nicht konstante Randwerte f_i lieferte. Dann lösten wir durch Bildung der ersten (im Unendlichen verschwindenden) Zusatzfunktionen für jeden Kreis einzeln die erste Randwertaufgabe des Außengebietes mit den Randwerten

$-f_i + k_i$. Die Summe der ersten Zusatzfunktionen ergab auf jedem Kreisrande wieder von einer Konstanten verschiedene Randwerte, mit welchen wir in derselben Weise die erste Randwertaufgabe fürs Außengebiet lösten usw. Das ist aber das alternierende Verfahren [Methode von Murphy][1]).

Die Dichte der induzierten Ladung auf jedem Kreisrande erhält man, indem man den Realteil der Reihenentwicklung (6a) nach der inneren Normalen ableitet und durch 2π dividiert.

Man kann durch eine einfache Überlegung unsere Methode auf die Lösung eines Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten zurückführen und interessante Betrachtungen über dessen Lösbarkeit anstellen.

Wir gehen von den Darstellungen (6) und (6a) für $V_{(z)}$ aus und beachten, daß die zweite Reihe in (6a) von den Hauptteilen der übrigen Kreise herrührt. Es muß demnach, wenn man diese Hauptteile um z_i in Potenzreihen entwickelt, die Reihe (6a) herauskommen. Durch Koeffizientenvergleichung beider Entwicklungen bekommt man ein System von unendlich vielen Gleichungen, indem man in $A_{n,i}$ i für jedes n von 1 bis m und n von 1 bis ∞ laufen läßt. Zur Aufstellung des Gleichungssystems benutzen wir die Formeln (7) und (8) und finden:

$$A_{n,i} + (-1)^n \sum_1^{m\,\prime} \sum_1^{\infty} \binom{n+\nu-1}{n} \frac{R_i^n R_j^\nu}{(z_i - z_j)^{n+\nu}} \cdot \bar{A}_{\nu,j}$$

$$= \sum_1^{m\,\prime} \frac{c_j}{n} \frac{R_i^n}{(z_j - z_i)^n} = a_{n,i}, \tag{9}$$

$$i = 1, 2 \ldots m; \quad n = 1, 2 \ldots \infty.$$

Das Komma an den Summenzeichen bedeutet, daß bei der Summation der Index i ausgelassen ist.

Die Auflösbarkeit dieses Systems soll untersucht werden. Charakteristisch für diese Gleichungen ist, daß die Koeffizienten komplex sind und die Unbekannten $A_{n,i}$, $A_{\nu,j}$ teils selbst, teils ihre konjugiert-komplexen Werte vorkommen. Im folgenden zeige ich an einem Beispiel von drei Gleichungen mit drei Unbekannten, wie ein solches System gelöst wird. Gegeben sind die Gleichungen:

$$\begin{aligned} z_1 + a_{12}\bar{z}_2 + a_{13}\bar{z}_3 &= c_1, \\ a_{21}\bar{z}_1 + z_2 + a_{23}\bar{z}_3 &= c_2, \\ a_{31}\bar{z}_1 + a_{32}\bar{z}_2 + z_3 &= c_3. \end{aligned} \tag{10}$$

[1]) A. Korn, Potentialtheorie **2**, 230, 1901.

Dieses System entspricht genau dem bei uns vorkommenden Unendlichen. Man bildet die konjugiert-komplexen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 + \bar{a}_{12}\cdot z_2 + a_{13}\cdot z_3 &= \bar{c}_1, \\ \bar{a}_{21} z_1 + \quad \bar{z}_2 + \bar{a}_{23}\ z_3 &= \bar{c}_2, \\ a_{31} z_1 + a_{32}\ z_2 + \quad \bar{z}_3 &= c_3, \end{aligned} \tag{10a}$$

und hat jetzt sechs Gleichungen mit den sechs Unbekannten: $z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$. Die Determinante des Systems ist:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 & a_{21} & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 & a_{31} & a_{32} & 0 \\ 0 & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} & 1 & 0 & 0 \\ \bar{a}_{21} & 0 & \bar{a}_{23} & 0 & 1 & 0 \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Ganz entsprechendes gilt für unser unendliches System. Wir müssen also auch hier das konjugiert-komplexe bilden:

$$\bar{A}_{n,i} + (-1)^n \sum_1^m{}' \sum_1^\infty \binom{n+\nu-1}{n} \frac{R_i^n R_j^\nu}{(z_i - z_j)^{n+\nu}} \cdot A_{\nu,j} = \bar{a}_{n,i}, \tag{9a}$$

$$i = 1, 2 \ldots m; \quad n = 1, 2, 3 \ldots \infty.$$

Damit das so entstandene kombinierte System (9, 9a) auflösbar sei, müssen erstens die Absolutwerte der Größen auf den rechten Seiten eine konvergente Quadratsumme haben. Das trifft augenscheinlich zu. Zweitens muß die Determinante des Systems existieren und von 0 verschieden sein. Sie existiert, wenn in der Darstellung:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + c_{11} & c_{12} & c_{13} \cdots \\ c_{21} & 1 + c_{22} & c_{23} \cdots \\ c_{31} & c_{32} & 1 + c_{33} \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}, \tag{12}$$

die Doppelsumme $\sum_1^\infty \sum_1^\infty |c_{ik}$ konvergiert[1]). Aus (11) ist ersichtlich daß es genügt, die Konvergenz von $\sum\sum |c_{ik}$ für das System (9) zu beweisen. Wir ersetzen hier die Koeffizienten durch ihre Absolutwerte, also $(z_i - z_j)$ durch R_{ij}, den gegenseitigen Abstand zweier Mittelpunkte. Zuerst ziehen wir diejenigen Koeffizienten zusammen, in welchen n mit ν und i mit j zugleich vertauscht sind:

$$\left[\binom{n+\nu-1}{n} + \binom{n+\nu-1}{\nu}\right] \frac{R_i^n R_j^\nu}{R_{ij}^{n+\nu}} = \binom{n+\nu}{n} \frac{R_i^n R_j^\nu}{R_{ij}^{n+\nu}},$$

[1]) G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie.

dann die, in welchen $n + \nu = k$ ist:

$$\sum_{1}^{k-1} \binom{k}{n} R_i^n R_j^{k-n} \atop R_{ij}^k = \binom{R_i + R_j}{R_{ij}}^k - \binom{R_i}{R_{ij}}^k \cdot \binom{R_j}{R_{ij}}^k < \binom{R_i + R_j}{R_{ij}}^k.$$

Lassen wir k unendlich wachsen, so erhalten wir für diese Koeffizientensumme als Majorante die konvergente geometrische Reihe:

$$M = \sum_{2}^{\infty k} \left(\frac{R_i + R_j}{R_{ij}}\right)^k, \qquad \text{da} \qquad \frac{R_i + R_j}{R_{ij}} < 1.$$

Machen wir dasselbe für alle $\frac{m\,(m-1)}{2}$ Kombinationen ij, so bekommen wir eine obere Schranke für die Doppelsumme $\sum\sum c_{ik}$. Also existiert die Determinante.

Der Zusammhang mit unserem Spiegelverfahren besteht darin, daß dieses nichts anderes ist, als die Lösung des Gleichungssystems mit Hilfe der Neumannschen Reihe[1]). Das sieht man, wenn man es ausführt, unmittelbar ein, doch soll hier nicht näher darauf eingegangen werden; auch ein direkter Beweis, daß die Determinante nicht verschwindet und die Neumannsche Reihe konvergiert, wäre noch zu liefern.

§ 3. Potentiale von Kreisgittern. Die Berechnung der Potentiale unendlich ausgedehnter Kreisgitter geschieht im Prinzip ebenso, wie bei einer endlichen Zahl von Kreisen. Bei der Rechnung besteht der Unterschied darin, daß man bei jeder Annäherung eine unendliche Zahl von Zusatzfunktionen hinzufügen muß. Ich werde mich auf zwei Fälle

Fig. 2.

beschränken, auf die einfachsten Fälle eines einfachperiodischen und eines doppeltperiodischen Kreisgitters. Andere komplizierte Fälle erledigen sich in derselben Weise.

A. Auf einer Geraden, der reellen Achse der z-Ebene, liegen in gleichen Abständen a voneinander die Mittelpunkte von Kreisen mit dem Radius 1 ($a > 2$). Einer der Mittelpunkte befindet sich im 0-Punkt. Alle Kreise sind mit der gleichen Ladung $+1$ geladen. Das ebene elektrostatische Potential des Gitters ist zu berechnen.

Zur ersten Annäherung denken wir uns die Ladungen der Kreise in ihren Mittelpunkten konzentriert und berechnen das Potential dieses

[1]) R. Courant und D. Hilbert, Methoden der math. Physik **1**, 8, 1924.

Punktgitters. Durch Summierung der Einzelpotentiale läßt es sich nicht bilden, da die Summe:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \ln \frac{1}{z - na}$$

divergiert. Wir machen sie daher durch konvergenzerzeugende Zusatzglieder konvergent und definieren als Potential des Punktgitters und als erste Annäherung für unser gesuchtes Potential die Funktion:

$$V_{1(z)} = \ln \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty}{}' \left(\ln \frac{1}{1 - \frac{z}{na}} + \ln \frac{1}{1 + \frac{z}{na}} \right)$$

$$= -\ln z \cdot \prod_{1}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z^2}{n^2 a^2}\right) = -\ln \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi z}{a} \cdot \tag{1}$$

Diese Funktion hat die Periode a (bis auf eine imaginäre Konstante, die keine Rolle spielt). In großer Entfernung von der reellen Achse muß sie mit der gesuchten übereinstimmen. Die Abweichungen werden sich erst in der Nähe der reellen Achse geltend machen. Wir entwickeln V_1 um den 0-Punkt in eine Reihe (um jeden anderen Kreismittelpunkt lautet die Entwicklung ebenso):

$$\left.\begin{aligned} V_{1(z)} &= -\ln z + \frac{1}{2} a_2 z^2 + \frac{1}{4} a_4 z^4 + \frac{1}{6} a_6 z^6 + \cdots \frac{1}{2n} a_{2n} z^{2n} + \cdots, \\ a_{2n} &= \frac{s_{2n}}{a^{2n}}; \quad s_{2n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots = \frac{2^{2n-1} \cdot \pi^{2n} \cdot B_{2n}}{2n!} < 2 \end{aligned}\right\} \text{(1}$$

(B_{2n} ist die $2n$-te Bernoullische Zahl).

Die ersten Zusatzfunktionen bilden wir genau so, wie in § 2, (4). Ihre Zahl ist unendlich und ihre Summe lautet:

$$Z_{1(z)} = -\left\{ \frac{a_2}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(z - na)^2} + \frac{a_4}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(z - na)^4} + \cdots \right\}$$

$$= -\left\{ \frac{a_2}{2!} \frac{d^2 V_1}{dz^2} + \frac{a_4}{4!} \frac{d^4 V_1}{dz^4} + \cdots \right\} \cdot \tag{2}$$

Geometrisch bedeutet $Z_{1(z)}$ das Potential der Dipole „erster Ordnung“, die durch Spiegelung der Mittelpunktsladungen aller Kreise an jedem einzelnen entstanden sind. Diese Dipole lassen sich immer zu doppelten Dipolen $(- + + -)$ zusammenordnen, was analytisch dadurch zum Ausdruck kommt, daß die Potenzreihe nur gerade Potenzen von z enthält.

Jetzt muß man nach dem § 2 die Funktion Z_1 um jeden Kreismittelpunkt (hier genügt wegen der Periodizität $z = 0$) in eine Reihe entwickeln und in derselben Art die Summe der zweiten Zusatzfunktionen $Z_{2(z)}$ bilden. Da Z_1 sich aus den Ableitungen von V_1 zusammensetzt, muß man die Reihe (1a) differenzieren und mit den entsprechenden Koeffizienten multiplizieren. Man erhält so für Z_1 die Entwicklung:

$$Z_{1(z)} = -\left(\frac{1}{2} a_2 z^{-2} + \frac{1}{4} a_4 z^{-4} + \cdots\right) + a_0^{(1)} + \frac{1}{2} a_2^{(1)} z^2 + \frac{1}{4} a_4^{(1)} z^4 + \cdots \tag{2a}$$

Die neuen Koeffizienten $a_{2n}^{(1)}$ setzen sich aus den alten in folgender Weise zusammen:

$$-a_{2n}^{(1)} = \binom{2n+1}{2} a_2 a_{2n+2} + \binom{2n+3}{4} a_4 a_{2n+4} + \cdots \tag{3}$$

Die Summe der zweiten Zusatzfunktionen Z_2 ist

$$Z_{2(z)} = -\left\{\frac{a_2^{(1)}}{2!}\frac{d^2 V_1}{dz^2} + \frac{a_4^{(1)}}{4!}\frac{d^4 V_1}{dz^4} + \cdots\right\} \tag{4}$$

und hat die Entwicklung

$$Z_{2(z)} = -\left(\frac{1}{2} a_2^{(1)} z^{-2} + \frac{1}{4} a_4^{(1)} z^{-4} + \cdots\right) + a_0^{(2)} + \frac{1}{2} a_2^{(2)} z^2 + \frac{1}{4} a_4^{(2)} z^4 + \cdots, \tag{4a}$$

in welcher die Koeffizienten $a_{2n}^{(2)}$ aus $a_{2n}^{(1)}$ und a_{2n} nach demselben Schema gebildet werden:

$$-a_{2n}^{(2)} = \binom{2n+1}{2} a_2^{(1)} a_{2n+2} + \binom{2n+3}{4} a_4^{(1)} a_{2n+4} + \cdots \tag{3a}$$

So fährt man weiter fort und erhält im Falle der Konvergenz das Potential:

$$V_{(z)} = V_{1(z)} - \frac{A_2}{2!}\frac{d^2 V_1}{dz^2} - \frac{A_4}{4!}\frac{d^2 V_1}{dz^4} - \cdots \tag{5}$$

mit der Entwicklung:

$$V_{(z)} = -\ln z + A_0 + \frac{1}{2} A_2 (z^2 - z^{-2}) + \frac{1}{4} A_4 (z^4 - z^{-4}) + \cdots \tag{5a}$$

Die Koeffizienten A_{2n} sind hier durch die Summen $A_{2n} = \sum_{\nu}^{\infty} a_{2n}^{(\nu)}$ bestimmt. Die Koeffizienten $a_{2n}^{(\nu)}$ berechnen sich aus $a_{2n}^{(\nu-1)}$ nach dem Schema:

$$-a_{2n}^{(\nu)} = \binom{2n+1}{2} a_2^{(\nu-1)} a_{2n+2} + \binom{2n+3}{4} a_4^{(\nu-1)} a_{2n+4} + \cdots \tag{3b}$$

Auch diese Methode kann sehr einfach auf die Lösung eines unendlichen linearen Gleichungssystems zurückgeführt werden. Wir machen den Ansatz (5) mit den unbekannten Koeffizienten A_{2n} und verlangen, daß seine Entwicklung um den 0-Punkt die Reihe (5a) ergibt. Durch Koeffizientenvergleichung erhalten wir das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[1+\binom{3}{2}a_4\right]\cdot A_2+\binom{5}{4}a_6\cdot A_4+\binom{7}{6}a_8\cdot A_6\cdots = a_2\\
&\binom{5}{2}a_6\cdot A_2+\left[1+\binom{7}{4}a_8\right]\cdot A_4+\binom{9}{6}a_{10}\cdot A_6\cdots = a_4\\
&\binom{7}{2}a_8\cdot A_2+\binom{9}{4}a_{10}\cdot A_4+\left[1+\binom{11}{6}a_{12}\right]A_6\cdots = a_6\\
&\vdots\\
&\binom{2n-1}{2}a_{2n+2}\cdot A_2+\binom{2n+3}{4}a_{2n+4}\cdot A_4+\cdots = a_{2n}
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Der Beweis, daß die Gleichungsdeterminante existiert, ist einfach zu führen. Dazu genügt [vgl. § 2, (12)] die Konvergenz der Doppelsumme $\sum_1^\infty{}_i \sum_1^\infty{}_k |c_{i,k}|$. Hier ist $c_{ik}=\binom{2i+2k-1}{2i}a_{2i+2k}$. Wir fassen die Glieder mit $i+k=n+1=$ konst. zusammen:

$$\left[\binom{2n+1}{2n}+\binom{2n+1}{2n-2}+\cdots\binom{2n+1}{4}+\binom{2n+1}{2}\right]a_{2n+2}$$

$$=(2^{2n}-1)\,a_{2n+2}<2^{2n}\cdot a_{2n+2}<\frac{2^{2n+1}}{a^{2n+2}}.$$

Die erste Gleichung folgt aus dem Binomischen Satz, die letzte Ungleichung aus der Abschätzung für a_{2n} (1a). Da $a>2$, so findet man für die Summe der Absolutwerte aller Koeffizienten als Majorante die konvergente geometrische Reihe: $M=\frac{1}{2}\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{2}{a}\right)^{2n+2}$.

Daß das Spiegelungsverfahren nichts anderes ist, als die Lösung des Gleichungssystems durch die Neumannsche Reihe, sieht man unmittelbar aus dem Bildungsgesetz (3, 3a, 3b) für die sukzessive zu berechnenden Koeffizienten. Man kann es mit Benutzung der Bezeichnung c_{ik} auch so schreiben:

$$-a_{2n}^{(\nu)}=c_{1,n}a_2^{(\nu-1)}+c_{2,n}a_4^{(\nu-1)}+c_{3,n}a_6^{(\nu-1)}+\cdots \qquad (7)$$

Durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung auf (7) erhält man Kriterien für die praktische Konvergenz des Verfahrens. Es ist:

$$(a_{2n}^{(\nu)})^2 \leqslant \left[\sum_1^\infty{}_i\, c_{i,n}^2\right]\left[\sum_1^\infty{}_n\, (a_{2n}^{(\nu-1)})^2\right] \tag{8}$$

und summiert über n:

$$\sum_1^\infty{}_n\, (a_{2n}^{\nu})^2 < \left[\sum_1^\infty{}_i \sum_1^\infty{}_n\, c_{i,n}^2\right]\cdot\left[\sum_1^\infty{}_n\, (a_{2n}^{(\nu-1)})^2\right] < M^2\cdot\left[\sum_1^\infty{}_n\, (a_{2n}^{(\nu-1)})^2\right]$$

$$< M^4\cdot\left[\sum_1^\infty{}_n\, (a_{2n}^{(\nu-2)})^2\right] < M^{2\nu}\left[\sum_1^\infty{}_n\, (a_{2n})^2\right] = M^{2\nu}\cdot K^2. \tag{9}$$

Für $\sum_1^\infty{}_i\, c_{in}^2$ gilt die Abschätzung:

$$\sum_1^\infty c_{in}^2 < \left[\sum_1^\infty{}_i\, |c_{i,n}|\right]^2 < \left[\sum_i \sum_k\, (c_{i,k})\right]^2 < \left[\frac{2^{2n-2}}{a^{2n-2}}M\right]^2. \tag{10}$$

Jetzt können wir für (8) mit Benutzung von (9) und (10) schreiben:

$$\left.\begin{aligned}(a_{2n}^{1})^2 < \left[\frac{2^{2n-2}}{a^{2n-2}}M\right]^2\cdot M^{2\nu-2}\cdot K^2 = \left[K\cdot M^{\nu}\left(\frac{2}{a}\right)^{2n-2}\right]^2\\ (a_{2n}^{\nu}) < K\cdot M^{\nu}\left(\frac{2}{a}\right)^{2n-2}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Ist $M<1$ und $a>2$, so haben beide Reihen: $\sum_0^\infty{}_\nu\, a_{2n}^{\nu}$ und $\sum_0^\infty{}_n\, A_{2n}$ konvergente geometrische Reihen zu Majoranten. Für $a=4$ ist $M=\frac{1}{24}$, die Konvergenz also sehr gut. Für $a=3$ ist $M=\frac{8}{45}$. In Wirklichkeit wechseln die Koeffizienten $a_{2n}^{(\nu)}$ mit wachsendem ν ihr Vorzeichen, so daß die Konvergenz wesentlich rascher erfolgt. Für ganz dicht aneinander liegende Kreise ($a \leqslant 3$) versagen diese Abschätzungen. Hierauf soll nicht näher eingegangen werden.

B. In der Z-Ebene ist mit den Perioden ω_1 und ω_3 ein Gitter gebildet, dessen Punkte durch:

$$w = m_1\omega_1 + m_3\omega_3; \qquad m_1,\ m_3 : 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

bestimmt sind. Um die Gitterpunkte sind Kreise mit dem Radius 1 geschlagen. Die Konstruktion des Gitters soll so sein, daß die Kreise sich weder schneiden noch berühren. Dazu ist hinreichend und notwendig, daß in dem durch ω_1 und ω_3 gebildeten Periodenparallelogramm Seiten

und Diagonalen länger als 2 sind. Analytisch ausgedrückt, lautet diese Bedingung:

$$\left.\begin{aligned}(\omega_1) &\geqslant a > 2\\ (\omega_3) &\geqslant a > 2\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}(\omega_1 - \omega_3) &\geqslant a > 2\\ (\omega_1 + \omega_3) &\geqslant a > 2\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Die Kreise sind Leiter und abwechselnd mit der Ladung $+1$ und -1 geladen, so daß die Ladung des Kreises um den Gitterpunkt w gegeben ist durch:

$$(-1)^{m_1 + m_3}.$$

Das elektrostatische Potential dieses Kreisgitters ist zu berechnen. Die erste Annäherung erhält man, wenn man sich die Ladungen der Kreise in ihren Mittelpunkt konzentriert denkt und das Potential dieses Punktgitters berechnet. Die Summe der Einzelpotentiale konvergiert nicht absolut, und man muß sie wieder durch konvergenzerzeugende Zusatzglieder absolut konvergent machen. Man kommt so zum ln der σ-Funktion (entsprechend dem ln sin im Falle A). Wir denken uns das Punktgitter entstanden durch Überlagerung von vier Gittern mit den doppelten Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_3$. Zwei von diesen Gittern tragen in ihren Punkten

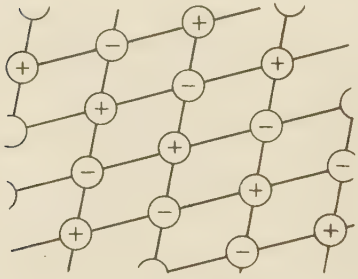

Fig. 3.

$$\begin{aligned}&2k_1\omega_1 + 2k_3\omega_3,\\ &(2k_1 + 1)\omega_1 + (2k_3 + 1)\omega_3,\end{aligned}\qquad k_1, k_3 : 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

positive Ladungen, die beiden anderen in den Punkten

$$(2k_1 + 1)\omega_1 + 2k_3\omega_3, \quad 2k_1\omega_1 + (2k_3 + 1)\omega_3$$

negative. Das Potential des Punktgitters ist dann:

$$V_{1(z)} = -\ln \sigma_{(z)} - \ln \sigma_{(z+\omega_2)} + \ln \sigma_{(z-\omega_1)} + \ln \sigma_{(z-\omega_3)}. \tag{2}$$

Hier sind die σ mit den Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_3$ gebildet. ω_2 ist durch $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ definiert. $V_{1(z)}$ ist doppeltperiodisch mit den Perioden $2\omega_2$ und $2\omega_3$ und läßt sich bis auf eine additive Konstante, die uns nicht interessiert, einfach durch die Nebensigmas: σ_1, σ_2, σ_3 ausdrücken[1]):

$$V_{1(z)} = -\ln \sigma_{(z)} - \ln \sigma_{2(z)} + \ln \sigma_{3(z)} + \ln \sigma_{1(z)}. \tag{3}$$

[1]) H. Burkhardt, Elliptische Funktionen, 3. Aufl., 1920, § 26 u. 42.

Wir entwickeln V_1 um den 0-Punkt in eine Potenzreihe, gehen dabei am einfachsten von der Produktdarstellung der σ-Funktionen aus[1]) und erhalten:

$$\left.\begin{aligned} V_{1(z)} &= -\ln z + e_2 z^2 + \Big[\frac{1}{4}\Big(\sum{}'(-1)^{m_1+m_3}\frac{1}{w^4}\Big) z^4 \\ &\quad + \frac{1}{6}\Big(\sum{}'(-1)^{m_1+m_3}\frac{1}{w^6}\Big) z^6 + \cdots \\ &= -\ln z + \frac{1}{2} a_2 z^2 + \frac{1}{4} a_4 z^4 + \frac{1}{6} a_6 z^6 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (3\,a)$$

$e_2 = \wp(\omega_2)$. $\wp$ ist mit den Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_3$ gebildet. Das Komma an den Summen bedeutet den Ausschluß der Kombination $m_1 = m_3 = 0$. Um einen anderen Punkt des Gitters lautet die Entwicklung ebenso, nur wechselt das Vorzeichen entsprechend dem Vorzeichen der Ladung.

Im Folgenden können wir uns wegen der weitgehenden Analogie zum Falle A kurz fassen.

Man bildet die erste Zusatzfunktion:

$$Z_{1(z)} = -\Big[\frac{\bar{a}_2}{2!}\frac{d^2 V_1}{dz^2} + \frac{\bar{a}_4}{4!}\frac{d^4 V_1}{dz^4} + \cdots\Big], \quad (4)$$

wobei uns wieder die Partialbruchdarstellungen der Ableitungen von V_1 den Anschluß an die Überlegungen des § 2 liefern: $Z_{1(z)}$ stellt das Potential des ersten Systems gespiegelter Dipole dar. Z_1 wird um den 0-Punkt in eine Reihe entwickelt:

$$\left.\begin{aligned} Z_{1(z)} &= -\Big(\frac{1}{2} a_2 z^{-2} + \frac{1}{4} a_4 z^{-4} + \cdots\Big) \\ &\quad + a_0^{(1)} + \frac{1}{2} a_2^{(1)} z^2 + \frac{1}{4} a_4^{(1)} z^4 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (4\,a)$$

und die zweite Funktion:

$$Z_{2(z)} = -\Big[\frac{a_2^{(1)}}{2!}\frac{d^2 V_1}{dz_2} + \frac{a_4^{(1)}}{4!}\frac{d^4 V_1}{dz^4} + \cdots\Big] \quad (5)$$

wird gebildet. So fährt man weiter fort und erhält:

$$Z_{\nu(z)} = -\Big[\frac{\bar{a}_2^{(\nu-1)}}{2!}\frac{d^2 V_1}{dz^2} + \frac{\bar{a}_4^{(\nu-1)}}{4!}\frac{d^4 V_1}{dz^4} + \cdots\Big] \quad (6)$$

und für $a_{2n}^{(\nu)}$ die Bildungsformel:

$$-a_{2n}^{(\nu)} = \binom{2n+1}{2}\bar{a}_2^{(\nu-1)} a_{2n+2} + \binom{2n+3}{4}\bar{a}_4^{(\nu-1)} a_{2n+4} + \cdots \quad (7)$$

[1]) H. Burkhardt, l. c., § 26 u. 43.

Im Falle der Konvergenz erhält man für V die Darstellung durch die Hauptteile:

$$V_{(z)} = V_{1(z)} + \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} Z_{(\nu)}(z) = V_{1(z)} - \frac{\overline{A}_2}{2!}\frac{d^2 V_1}{dz^2} - \frac{\overline{A}_4}{4!}\frac{d^4 V_1}{dz^4} - \cdots \quad (8)$$

und die Reihenentwicklung:

$$V_{(z)} = -\ln z + A_0 + \frac{1}{2}(A_2 z^2 - \overline{A}_2 z^{-2}) + \frac{1}{4}(A_4 z^4 - \overline{A}_4 z^{-4}) + \cdots \quad (8a)$$

Die Koeffizienten A_{2n} bzw. $\overline{A}_{2n}$ sind durch die Reihen

$$A_{2n} = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} a_{2n}^{(\nu)}; \quad \overline{A}_{2n} = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} \bar{a}_{2n}^{(\nu)}$$

bestimmt.

Das unendliche Gleichungssystem, dem die Koeffizienten A_{2n} und $\overline{A}_{2n}$ genügen müssen, erhält man durch den Ansatz (8) mit der Bedingung (8a) durch Koeffizientenvergleichung:

$$\left.\begin{aligned} A_2 + \binom{3}{2} a_4 \overline{A}_2 + \binom{5}{4} a_6 \overline{A}_4 + \cdots &= a_2 \\ A_4 + \binom{5}{2} a_6 \overline{A}_2 + \binom{7}{4} a_8 \overline{A}_4 + \cdots &= a_4 \\ A_6 + \binom{7}{2} a_8 \overline{A}_2 + \binom{9}{4} a_{10} \overline{A}_4 + \cdots &= a_6 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

und ergänzt es durch das konjugiert komplexe System (vgl. § 2, 10a).

$$\left.\begin{aligned} \overline{A}_2 + \binom{3}{2} \bar{a}_4 A_2 + \binom{5}{4} \bar{a}_6 A_4 + \cdots &= \bar{a}_2 \\ \overline{A}_4 + \binom{5}{2} \bar{a}_6 A_2 + \binom{7}{4} \bar{a}_8 A_4 + \cdots &= \bar{a}_4 \\ \overline{A}_6 + \binom{7}{2} a_8 A_2 + \binom{9}{4} \bar{a}_{10} A_4 + \cdots &= a_6 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}\right\} \quad (9a)$$

Daß das Spiegelungsverfahren nichts anderes ist, als die Lösung des Systems durch die Neumannsche Reihe, sieht man unmittelbar aus dem Bildungsgesetz (7) für die sukzessive zu berechnenden Koeffizienten: $a_{2n}^{(\nu)}$.

Es lassen sich auch hier Betrachtungen über die Existenz der Gleichungsdeterminante und die praktische Konvergenz des Verfahrens anknüpfen, die denen in A ganz analog sind. Man geht von einer Abschätzung für $a_{2n} = \sum' (-1)^{m_1+m_3} \frac{1}{w^{2n}}$ aus, die so lautet:

$$a_{2n} < \frac{k}{a^{2n}}$$

und am Schluß bewiesen werden soll (im Falle A hatten wir $a_{2n} < \frac{2}{a^{2n}}$).

Jetzt ist der Existenzbeweis für die Determinante genau der gleiche wie in A, und die Anwendung der Schwarzschen Ungleichung auf (7) führt auf demselben Wege zu ähnlichen Resultaten für die Konvergenz des Verfahrens.

Die Abschätzung für $|a_{2n}|$ erhält man wie folgt:

$$|a_{2n}| = \left|\sum' (-1)^{m_1+m_3} \frac{1}{w^{2n}}\right| < \sum' \frac{1}{|w^2|^n}.$$

Wir brauchen eine untere Grenze für $|w^2|$. Man kann w immer als lineare Kombination von zwei der Vektoren $\pm\omega_1$, $\pm\omega_3$, $\pm(\omega_1 - \omega_3)$, $\pm(\omega_1 + \omega_3)$ so darstellen, daß diese beiden (Ω_1, Ω_3) einen spitzen Winkel miteinander bilden und die Koeffizienten (M_1, M_3) positive ganze Zahlen sind:

$$w = M_1 \Omega_1 + M_3 \Omega_3.$$

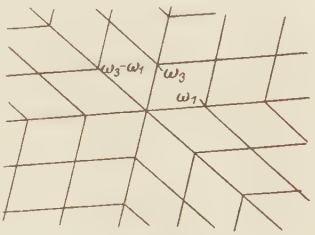

Fig. 4.

Dann gilt die Ungleichung:

$$w^2 > M_1^2 \Omega_1^2 + M_3^2 \Omega_3^2$$

und wegen (1),

$$w^2 > a^2 (M_1^2 + M_3^2).$$

Eine solche Darstellung ist in der folgenden Figur angedeutet und immer möglich. Man entnimmt ihr leicht die Abschätzung:

$$|a_{2n}| < \sum' \frac{1}{w^{2n}} < \frac{1}{a^{2n}} \frac{3}{2} \sum \sum' \frac{1}{(M_1^2 + M_3^2)^n}.$$

Der Faktor rechts konvergiert für $n > 1$ und liegt dann unter einer positiven Größe k. Man kann also schreiben:

$$|a_{2n}| < \frac{k}{a^{2n}}.$$

II. Teil.

Räumliche elektrostatische Potentiale von Kugelkonduktoren.

Der zweite Teil bildet in jeder Beziehung ein Analogon zum ersten.

Das Problem ist analog. Es besteht in der Berechnung elektrostatischer Potentiale von Systemen geladener Kugelkonduktoren.

Die Methoden entsprechen denen im ersten Teil. Auch hier bildet den Ausgangspunkt ein Spiegelungsverfahren, das auf das alternierende Verfahren und die Auflösung linearer Gleichungssysteme zurückgeführt werden kann. Die Rolle der Potenzreihenentwicklungen und deren analytischer Fortsetzung spielen hier Entwicklungen von Potentialfunktionen nach Kugelfunktionen. Da für die analytische Fortsetzung solcher Reihen noch keine Methoden ausgearbeitet sind, so füge ich vor der eigentlichen Behandlung des Problems einen Paragraphen (§ 1) über ihre analytische Fortsetzung ein.

Die weitere Einteilung entspricht derjenigen im ersten Teil genau. § 2 enthält eine Wiedergabe des Spiegelungsverfahrens. In § 3 wird im Anschluß daran eine Methode zur Berechnung des Potentials eines endlichen Kugelsystems angegeben und in andere Zusammenhänge eingeordnet. In § 4 wird sie auf einige Fälle unendlich ausgedehnter Kugelgitter angewandt.

§ 1. Über die analytische Fortsetzung von Potentialfunktionen, die als Entwicklungen nach Kugelfunktionen gegeben sind. Jede Potentialfunktion, die im Innern einer Kugelschale regulär ist, läßt sich um den Mittelpunkt dieser Schale in eine Reihe nach Kugelfunktionen entwickeln, die folgende Form hat:

$$\sum_{0}^{\infty n} \frac{1}{r_i^n} X_{-n}(\Theta_i, \varphi_i) + \sum_{0}^{\infty n} r_i^n X_n(\Theta_i, \varphi_i).$$

r_i, Θ_i, φ_i sind hier die Polarkoordinaten des Aufpunktes in bezug auf den Mittelpunkt der Schale. X_n und X_{-n} sind Kugelfunktionen n-ter Ordnung. Der erste Teil der Reihe konvergiert außerhalb der kleineren, der zweite innerhalb der größeren Kugel. Ist die Funktion im Innern

einer Kugel regulär, so enthält die Reihe nur den zweiten Teil; ist die Funktion im ganzen Außengebiet der Kugel regulär und verschwindet sie im Unendlichen, so enthält die Reihe nur den ersten Teil. Sie ist ein vollkommenes Analogon zur Laurentreihe $\sum_{1}^{\infty n} a_{-n}\,(z-z_i)^{-n}$ $+\sum_{0}^{\infty n} a_n\,(z-z_i)^n$ in der Funktionentheorie.

Ich stelle mir nun die Aufgabe, eine Potentialfunktion, die in Gestalt einer solchen Reihenentwicklung nach Kugelfunktionen gegeben ist, um einen Punkt ihres Regularitätsbereichs in eine neue Reihe zu entwickeln, oder anders ausgedrückt, eine gegebene Entwicklung analytisch fortzusetzen.

Im entsprechenden funktionentheoretischen Problem macht man das so, daß man jedes einzelne Glied $a_n\,(z-z_i)^n$ um den neuen Entwicklungsmittelpunkt in eine Reihe entwickelt:

$$a_n\,(z-z_i)^n = \sum_{0}^{\infty m} b_m\,(z-z_j)^m,$$

deren Koeffizienten b_m man dadurch bestimmt, daß man die linke Seite der Gleichung m-mal an der Stelle $z = z_j$ nach z differenziert und durch $m!$ dividiert. Nachher ordnet man nach Potenzen von $(z-z_j)$.

Genau so machen wir es in unserem Falle. Die einzelnen Glieder der gegebenen Entwicklung

$$\frac{1}{r_i^{n+1}}\,X_{-n}\,(\Theta_i, \varphi_i) \quad \text{und} \quad r_i^n\,X_n\,(\Theta_i, \varphi_i)$$

setzen sich linear mit konstanten Koeffizienten aus folgenden Funktionen zusammen:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{1}{r_i^{n+1}}\,P_{n,\nu}\,(\cos\Theta_i)\,.\,\cos\nu\,\varphi_i; & r_i^n\,P_{n,\nu}\,(\cos\Theta_i)\,\cos\nu\,\varphi_i, \\ \dfrac{1}{r_i^{n+1}}\,P_{n,\nu}\,(\cos\Theta_i)\,\sin\nu\,\Theta_i; & r_i^n\,P_{n,\nu}\,(\cos\Theta_i)\,\sin\nu\,\Theta_i, \end{array}\right\} \nu = 0,\ 1, \ldots n.$$

[Für $P_{n,\nu}\,(\cos\Theta_i)$, die zugeordneten Kugelfunktionen erster Art, schreiben wir im folgenden einfach: $P^i_{n,\nu}$. Wir legen dabei die Heinesche Definition der Kugelfunktionen zugrunde: $P^{(x)}_{n,\nu} = \dfrac{n-\nu!}{2n!}\,(\sqrt{x^2-1})^\nu\,\dfrac{d^{n+\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n+\nu}}$].

Diese Funktionen entwickeln wir jetzt um den neuen Mittelpunkt mit den Polarkoordinaten r_j, Θ_j, φ_j in Reihen und machen dazu den Ansatz:

$$\frac{1}{r_i^{n+1}} P^i_{n,\nu} \cdot \cos \nu \varphi_i = \sum_0^\infty{}_m r_j^m X_m(\Theta_j, \varphi_j)$$

$$= \sum_0^\infty{}_m \sum_0^m{}_\mu r_j^m P^j_{m,\mu} (A_{m,\mu} \cos \mu \varphi_j + B_{m,\mu} \sin \mu \varphi_j). \quad (1)$$

Für die anderen Funktionen lautet der Ansatz ebenso. Die $A_{m,\mu}$ und $B_{m,\mu}$ sind Konstanten. r_j, Θ_j, φ_j, die Polarkoordinaten des Aufpunktes in bezug auf den neuen Entwicklungsmittelpunkt, hängen mit r_i, Θ_i, φ_i einfach zusammen. Die zu $r_j = 0$ gehörigen Werte von r_i, Θ_i, φ_i nennen wir r_{ij}, Θ_{ij}, φ_{ij}. Es sind die Polarkoordinaten des neuen Entwicklungsmittelpunktes in bezug auf den alten. Um die Konstanten $A_{m,\mu}$ und $B_{m,\mu}$ zu bestimmen, differenzieren wir die linke Seite des Ansatzes (1) m-mal partiell nach r_j bei konstantem Θ_j, φ_j (oder in der Richtung Θ_j, φ_j) und setzen $r_j = 0$ (oder: $r_i = r_{ij}$; $\varphi_i = \varphi_{ij}$; $\Theta_i = \Theta_{ij}$). Es gilt dann:

$$X_m(\Theta_j, \varphi_j) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial r_j^m} \frac{1}{r_i^{n+1}} P^i_{n,\nu} \cos \nu \varphi_i \,|\, r_j = 0$$

$$= \sum_0^m{}_\mu P^j_{m,\mu} (A_{m,\mu} \cos \mu \varphi_j + B_{m,\mu} \sin \mu \varphi_j). \quad (2)$$

Man braucht den Differentialquotienten nur in eine geeignete Form zu bringen, um die Konstanten abzulesen. Über die Form der Konstanten kann man schon jetzt folgendes aussagen: Da $\frac{1}{r_i^{n+1}} P^i_{n,\nu} \cos \nu \varphi_i$ in rechtwinkligen Koordinaten ausgedrückt eine homogene Potentialfunktion $-(n+1)$-ten Grades ist, so ist der m-malige Differentialquotient in $r_j = 0$ sicher eine solche vom $-(m+n+1)$-ten Grade. $X_m(\Theta_j, \varphi_j)$ hat also als Funktion von r_{ij}, Θ_{ij}, φ_{ij} die Form: $\frac{1}{r_{ij}^{m+n+1}} X_{m+n}(\Theta_{ij}, \varphi_{ij})$, und die Konstanten $A_{m,\mu}$ und $B_{m,\mu}$ sind Kugelfunktionen $(m+n)$-ter Ordnung in Θ_{ij}, φ_{ij}. Sie sind unabhängig von der Richtung, in welcher wir differenzieren, und daher können wir uns diese wählen. Wir differenzieren in der Richtung $\Theta_j = \Theta_{ij} = \Theta_j$; $\varphi_j = \varphi_{ij} = \varphi_i$, d. h. in der vom alten zum neuen Entwicklungsmittelpunkt weisenden Richtung. Dann lautet der Differentialquotient:

$$X_m(\Theta_{ij}, \varphi_{ij}) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial r_j^m} \frac{1}{r_i^{n+1}} P^i_{n,\nu} \cdot \cos \nu \varphi_i \,|\, r_j = 0$$

$$= (-1)^m \binom{n+m}{n} \frac{1}{r_{ij}^{m+n+1}} P^{ij}_{n,\nu} \cdot \cos \nu \varphi_{ij}. \quad (3)$$

Um die Konstanten zu bestimmen, müssen wir die rechte Seite geeignet umformen. Dazu benutzen wir die Hilfsformel I[1])

$$(-1)^m \binom{m+n}{m} P_{n,\nu}(\cos\Theta) = \sum_{-m}^{+m}{}_{\mu} K^n_{m,\mu} P_{m+n,|\mu+\nu|}(\cos\Theta) \cdot P_{m,|\mu|}(\cos\Theta), \quad (4)$$

wo die Konstanten $K^n_{m,\mu}$ definiert sind durch:

$$K^n_{m,\mu} = (-1)^{m+\mu} \frac{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2m-1)}{2^m m!} \binom{2m}{m-\mu}. \quad (5)$$

Mit ihrer Hilfe formen wir die rechte Seite von (3) um und erhalten:

$$X_m(\overline{\Theta}_{ij}, \overline{\varphi}_{ij}) = \frac{1}{r_{ij}^{m+n+1}} \sum_{-m}^{+m}{}_{\mu} K^n_{m,\mu} \cdot P_{m+n,|\mu+\nu|}(\cos\Theta_{ij}) \cdot P_{m,|\mu|}(\cos\overline{\Theta}_{ij}) \cdot \cos[(\nu+\mu)\varphi_{ij} - \mu\overline{\varphi}_{ij}]. \quad (6)$$

In den überstrichenen Größen $\overline{\Theta}_{ij}$, $\overline{\varphi}_{ij}$ ist das Resultat eine Kugelfunktion m-ter Ordnung, sie sind also bei der Differentiation in einer beliebigen Richtung durch Θ_j, φ_j zu ersetzen. In den Größen r_{ij}, Θ_{ij}, φ_{ij} ist das Resultat eine Potentialfunktion $-(m+n+1)$-ten Grades, sie bleiben bei der Differentiation in einer beliebigen Richtung konstant. Wir haben also den

Satz I. Die Entwicklung der Potentialfunktion $\frac{1}{r_i^{n+1}} P^i_{n,\nu} \cos\nu\varphi_i$ um einen neuen Mittelpunkt mit den Polarkoordinaten r_j, Θ_j, φ_j lautet:

$$\frac{1}{r_i^{n+1}} \cdot P^i_{n,\nu} \cdot \cos\nu\varphi_i = \sum_0^{\infty}{}_m \sum_{-m}^{+m}{}_{\mu} \frac{r_j^m}{r_{ij}^{m+n+1}} K^n_{m,\mu} P^{ij}_{m+n,\ \mu+\nu} P^j_{m,|\mu|} \cdot \cos[(\mu+\nu)\varphi_{ij} - \mu\varphi_j]. \quad (7)$$

1. Zusatz. Für die Entwicklung der Funktion $\frac{1}{r_i^{n+1}} P^i_{n,\nu} \cdot \sin\nu\varphi_i$ um einen neuen Mittelpunkt mit den Polarkoordinaten r_j, Θ_j, φ_j gilt dieselbe Formel, man muß nur den Cosinus mit dem Sinus vertauschen.

2. Zusatz. Die Entwicklung der Potentialfunktion $\frac{1}{r_i^{n+1}} P_n(\cos\Theta_i)$ um einen neuen Mittelpunkt, der auf der Symmetrieachse der Funktion liegt ($\Theta_i = 0$) und in bezug auf welchen die Koordinaten des Aufpunktes r_j, Θ_j sind, lautet:

$$\frac{1}{r_i^{n+1}} P_n(\cos\Theta_i) = \sum_0^{\infty}{}_m (-1)^m \binom{m+n}{m} \frac{r_j^m}{r_{ij}^{m+n+1}} P_m(\cos\Theta_j). \quad (7\,a)$$

[1]) Der Beweis wird am Schluß des Paragraphen gebracht, um hier den Gedankengang nicht zu unterbrechen.

Dieser Zusatz enthält den Spezialfall, daß $\nu = 0$, die Funktion also von φ_i unabhängig und symmetrisch zur Achse $\Theta_i = 0$ ist. Man erhält ihn aus Satz I, in dem man $\mu = 0$, $\nu = 0$ setzt und die Beziehung $P_{n,0}(x) = \frac{n!}{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)} P_n(x)$ benutzt. Er bildet ein vollkommenes Analogon zur Potenzreihenentwicklung:

$$\frac{1}{(z - z_i)^{n+1}} = \sum_0^\infty{}_m (-1)^m \binom{m+n}{m} \frac{(z - z_j)^m}{(z_i - z_j)^{m+n+1}}.$$

Diese Analogie ist für unser Problem von großer Wichtigkeit, und wir kommen später noch darauf zurück.

Dieselbe Aufgabe löst man in ganz ähnlicher Weise für die Funktionen $r_i^n \cdot P_{n,\nu}^i \cdot \cos \nu \varphi_i$ und $r_i^n P_{n,\nu}^i \cdot \sin \nu \varphi_i$. Ein wesentlicher Unterschied besteht nur darin, daß die Entwicklung endlich viele, nämlich $(n+1)$ Glieder hat. Man macht also den Ansatz:

$$r_i^n P_{n,\nu}^i \cos \nu \varphi_i = \sum_0^n{}_m r_j^m X_m(\Theta_j, \varphi_j),$$

differenziert an der Stelle r_j m-mal in der Richtung der Verbindungslinie beider Mittelpunkte und benutzt die Hilfsformel II[1])

$$\binom{n}{m} P_{n,\nu}(\cos \Theta) = \sum_{-m}^{+m}{}_\mu l_{m,\mu}^{n,\nu} P_{n-m,|\nu+\mu|}(\cos \Theta) P_{m,|\mu|}(\cos \Theta), \qquad (8)$$

wo die Konstanten $l_{m,\mu}^{n,\nu}$ definiert sind durch

$$l_{m,\mu}^{n,\nu} = \frac{\binom{n}{m}\binom{2m}{m+\mu}\binom{2n-2m}{n-m+\nu+\mu}}{\binom{2n}{n+\nu}}. \qquad (9)$$

Sie gilt, wenn man festsetzt, daß alle $l_{m,\mu}^{n,\nu}$ verschwinden, so bald $n - m < |\nu + \mu|$ ist, und daß $P_{0,0} = 1$ ist. Wir beweisen jetzt genau wie vorher den

Satz II. Die Entwicklung der Potentialfunktion $r_i^n P_{n,\nu}^i \cos \nu \varphi_i$ um einen neuen Mittelpunkt mit den Polarkoordinaten r_j, Θ_j, φ_j lautet:

$$r_i^n P_{n,\nu}^i \cdot \cos \nu \varphi_i$$
$$= \sum_0^n{}_m \sum_{-m}^{+m}{}_\mu r_j^m r_{ij}^{n-m} l_{m,\mu}^{n,\nu} P_{n-m,|\nu+\mu|}^{ij} P_{m,|\mu|}^j \cos[(\nu+\mu)\varphi_{ij} - \mu \varphi_j]. \qquad (10)$$

1. Zusatz. Für die Entwicklung der Funktion $r_i^n P_{n,\nu}^i \sin \nu \varphi_i$ gilt dieselbe Formel, man muß nur den Cosinus durch den Sinus ersetzen.

[1]) Der Beweis wird am Schluß des Paragraphen gebracht.

2. Zusatz (vgl. 2. Zusatz zu Satz I). Im Falle eines von φ_i unabhängigen Potentials gilt die Entwicklung:

$$r_i^n P_n(\cos\Theta_i) = \sum_0^n {}_m r_j^m r_{ij}^{n-m} \binom{n}{m} P_m(\cos\Theta_j). \tag{10a}$$

Sie hat in der Funktionstheorie das Analogon:

$$(z - z_i)^n = \sum_0^n {}_m (z - z_j)^m (z_j - z_i)^{n-m} \binom{n}{m}.$$

Die Sätze I und II mit ihren Zusätzen geben uns die Möglichkeit, die Glieder einer als Reihenentwicklung nach Kugelfunktionen gegebenen Potentialfunktion einzeln fortzusetzen, d. h. um einen neuen Mittelpunkt in solche Reihen zu entwickeln. Um die ganze Reihe fortzusetzen, muß man den Entwicklungsmittelpunkt innerhalb der Konvergenzkugel bzw. Kugelschale der gegebenen Entwicklung wählen. Die numerische Berechnung ist verhältnismäßig einfach, besonders in den durch die zweiten Zusätze charakterisierten Fällen. Hier werden die Koeffizienten der neuen Entwicklung genau so wie bei der analytischen Fortsetzung von Potenzreihen bestimmt.

Man kann das eben behandelte Problem auch von einem anderen Gesichtspunkt aus anfassen, auf den ich hier kurz eingehen will.

Die Potentialfunktion $\frac{1}{r_i^{n+1}} X_n(\Theta_i, \varphi_i)$ ist nach einem Satz von Sylvester[1]) bis auf eine multiplikative Konstante der n-te Differentialquotient von $\frac{1}{r_i}$ in n im allgemeinen verschiedenen Richtungen:

$$\frac{1}{r_i^{n+1}} X_n(\Theta_i, \varphi_i) = C \frac{\partial \frac{1}{r_i}}{\partial \nu_1 \partial \nu_2 \dots \partial \nu_n}.$$

Man müßte also, um sie analytisch fortzusetzen, $\frac{1}{r_i}$ um den neuen Entwicklungsmittelpunkt in eine Reihe entwickeln (was sehr einfach ist) und diese dann n-mal in den verschiedenen Richtungen differenzieren.

Als Beispiel nehmen wir die Funktion $\frac{1}{r_i^{n+1}} P_n(\cos\Theta_i)$, welche symmetrisch zu einer Achse ist, die wir die z-Achse nennen wollen, und um einen neuen Entwicklungsmittelpunkt, der auf ihr liegt, in eine Reihe

[1]) D. Hilbert und R. Courant, Methoden der math. Physik. S. 427, 1924.

entwickelt werden soll. Es gelten die beiden leicht zu beweisenden Formeln:

$$1. \quad \frac{\partial \frac{1}{r_i^{n+1}} P_n(\cos\Theta_i)}{\partial z} = -(n+1)\frac{1}{r_i^{n+2}} P_{n+1}(\cos\Theta_i), \tag{11}$$

$$2. \quad \frac{\partial\, r_i^n P_n(\cos\Theta_i)}{\partial z} = n\, r_i^{n-1} P_{n-1}(\cos\Theta_i). \tag{12}$$

Aus der ersten folgt durch Rückwärtsschließen die Darstellung von $\frac{1}{r_i^{n+1}} P_n(\cos\Theta_i)$ als Differentialquotient:

$$\frac{1}{r_i^{n+1}} P_n(\cos\Theta_i) = (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \frac{1}{r_i}}{\partial z^n}. \tag{13}$$

Wir entwickeln also $\frac{1}{r_i}$ um den neuen Entwicklungsmittelpunkt in eine Reihe:

$$\frac{1}{r_i} = \sum_0^\infty{}^m \frac{r_j^m}{r_{ij}^{m+1}} P_m(\cos\Theta_j) \tag{14}$$

und differenzieren mit Hilfe der beiden Formeln beiderseits n-mal in der Richtung z. Wir bekommen das aus Satz I, 1. Zusatz bekannte Resultat:

$$\frac{1}{r_i^{n+1}} P_n(\cos\Theta_i) = \sum_0^\infty{}^m (-1)^m \binom{m+n}{m} \frac{r_j^m}{r_{ij}^{m+n+1}} P_m(\cos\Theta_j). \tag{15}$$

Bei Potenzreihen würde man analog $\frac{1}{(z-z_i)^{n+1}}$ als n-ten Differentialquotient vom $\frac{1}{z-z_i}$ darstellen, diese Funktion um z_j entwickeln und die erhaltene Reihe n-mal nach z differenzieren.

Anhang. Beweis der Hilfsformeln I und II.

Man geht von folgenden zwei Rekursionsformeln aus, welche sich aus den bekannten leicht kombinieren lassen [1]):

$$P_{n,\nu} = -\frac{2n+1}{2n+2}[P_{n+1,\nu-1} \cdot i\sin\Theta - 2\, P_{n+1,\nu} \cdot \cos\Theta + P_{n+1,\nu+1} \cdot i\sin\Theta], \tag{16}$$

$$P_{n,\nu} = \frac{1}{2n(2n-1)}[(n+\nu-1)(n+\nu) P_{n-1,\nu-i} \cdot i\sin\Theta + 2(n+\nu)(n-\nu) P_{n-1,\nu} \cdot \cos\Theta + (n-\nu-1)(n-\nu) P_{n-1,\nu+1} \cdot i\sin\Theta]. \tag{17}$$

[1]) Heine, Kugelfunktionen, 1. Bd., 1878, 2. Aufl., S. 258.

Die Hilfsformel I beweist man, indem man (16) wiederholt auf sich selbst anwendet und dadurch die Ordnung der Kugelfunktionen der rechten Seite immer weiter erhöht. Zugleich zieht man die als Koeffizienten auftretenden Funktionen von $\cos \Theta$ und $\sin \Theta$ mit Hilfe der Formel (17) zu Kugelfunktionen immer höherer Ordnung zusammen. Durch m-malige Wiederholung des Verfahrens findet man die Hilfsformel I. Die Hilfsformel II findet man, indem man (17) m-mal auf sich selbst anwendet, die Ordnung der Kugelfunktionen der rechten Seite erniedrigt und die Koeffizientenfunktionen zu Kugelfunktionen immer höherer Ordnung zusammenzieht.

§ 2. Das Spiegelungsverfahren. Es läßt sich im räumlichen Problem ein ähnliches Spiegelungsverfahren anwenden wie im ebenen. Es beruht auf einem Satz über konjugierte Flächenbelegungen [1]). Zwei Flächen oder Flächenelemente (bzw. Punkte) nennen wir konjugiert, wenn sie auseinander durch Spiegelung an einer Kugel (Radius R) hervorgehen. Dann besteht zwischen den Abständen r und r' entsprechender Punkte vom Mittelpunkt die Beziehung

$$r' = \frac{R^2}{r}. \tag{1}$$

Die Belegungen η und η' zweier konjugierter Flächenelemente (oder Punkte) heißen konjugiert, wenn zwischen ihnen die Beziehungen

$$\eta' = \eta \frac{r'}{R} \quad \text{bzw.} \quad \eta = \eta' \frac{r}{R} \tag{2}$$

bestehen. Beide Gleichungen (2) sind wegen (1) äquivalent. Haben die Belegungen außerdem entgegengesetztes Vorzeichen, so nennen wir sie entgegengesetzt konjugiert oder „gespiegelt“.

Der erwähnte Satz sagt nun aus, daß zwischen den Potentialen solcher konjugierter Belegungen oder Punktladungen an konjugierten Aufpunkten die Beziehung besteht:

$$Vp = \frac{r'}{R} V'p'. \tag{3}$$

Unser Problem ist folgendes: Gegeben sind m leitende Kugeln K_i mit den Mittelpunkten (x_i, y_i, z_i), den Radien R_i und den Abständen R_{ij} zwischen je zwei Mittelpunkten. Sie sollen sich weder schneiden noch berühren $\left(\frac{R_i + R_j}{R_{ij}} < 1\right)$ und sind mit den Ladungen e_i auf die

[1]) E. R. Neumann, Beiträge zu einzelnen Fragen der höheren Potentialtheorie, S. 110. (Preisschriften der Fürstlich-Jablonowskischen Gesellschaft 1912.)

Potentiale C_i geladen. Man betrachtet nun[1]) jeweils eine der Kugeln als Abbildungskugel und wendet den Satz über die konjugierten Flächenbelegungen an, indem man die Konstanz des Potentials im Innern und auf dem Rande der Kugeln benutzt. Man findet folgendes: Das Potential der Kugel K_i in ihrem Außengebiet kann ersetzt werden durch das Potential der Punktladung $R_i\, C_i$ in ihrem Mittelpunkt und durch das Potential der an K_i gespiegelten übrigen Kugeln mit den entsprechenden „gespiegelten" Belegungen. Im Gegensatz zum ebenen Problem sind diese Belegungen nicht miteinander und dem ganzen System im elektrostatischen Gleichgewicht. Man kann die Fortsetzung auch weitertreiben, indem man sie sich genau wie im ebenen Problem in allen Kugeln außer einer K_i durchgeführt denkt und an dieser das übrige System spiegelt. Man erhält dann in den Spiegelpunkten der Mittelpunkte der übrigen Kugeln K_j die Ladungen $-\frac{R_i R_j}{R_{ij}} C_j$ und ein System von kleineren mit Ladung belegten Kugeln. So fährt man weiter fort und erhält immer weitere Punktsysteme und kleinere mit immer abnehmender Ladung belegte Kugeln. Man kann das erhaltene Punktsystem folgendermaßen beschreiben: Man denke sich im Mittelpunkt jeder Kugel K_j die Ladung $R_j C_j$. Dieses System spiegelt man an jeder einzelnen Kugel K_i (die zu K_i gehörige Ladung $R_i C_i$ spiegelt man dabei nicht mit). Das so erhaltene System spiegelt man wieder an jeder einzelnen Kugel usw. Die Ladungen der neu hinzukommenden Spiegelpunkte wechseln ihr Vorzeichen und werden immer kleiner.

§ 3. Das Potential eines endlichen Systems. Die Berechnung des Potentials eines endlichen Systems geschieht in der Weise, daß man die Potentiale der einzelnen eben beschriebenen Punktsysteme übereinanderlagert.

Vorher geben wir uns darüber Rechenschaft, welche Form das Resultat haben wird.

Da man das Potential V ins Innere jeder Kugel hinein stetig fortsetzen kann, so ist es regulär in einer Schale, die die Oberfläche von K_i enthält, und dort durch die Reihe

$$V = \sum_0^\infty{}_n \frac{R_i^{n+1}}{r_i^{n+1}} Y_{-n,i}(\Theta_i, \varphi_i) + \sum_0^\infty{}_n \frac{r_i^n}{R_i^n} Y_{n,i}(\Theta_i, \varphi_i) \qquad (1)$$

darstellbar. ($Y_{n,i}$ und $Y_{-n,i}$ sind Kugelfunktionen n-ter Ordnung. Die erste Reihe konvergiert und ist regulär auf der Oberfläche und im ganzen

[1]) Vgl. die erwähnte Dissertation von E. Hermann.

Außengebiet von K_i, verschwindet im Unendlichen wie $\frac{R_i Y_{-0}}{r_i} = \frac{e_i}{r_i}$ und stellt den „Hauptteil“ oder den Anteil der Kugel K_i an der Potentialfunktion dar. Die zweite Reihe konvergiert und ist regulär auf der Oberfläche und im Innern von K_i und rührt von den Hauptteilen der anderen Kugeln her. Statt durch eine Reihenentwicklung kann man V auch durch die Summe der Hauptteile darstellen:

$$V = \sum_1^m \sum_0^\infty \frac{R_i^{n+1}}{r_i^{n+1}} Y_{-n,i}(\Theta_i, \varphi_i). \tag{1a}$$

Zwischen den Kugelfunktionen der Entwicklung (1) besteht die Beziehung $Y_{n,i}(\Theta_i, \varphi_i) + Y_{-n,i}(\Theta_i, \varphi_i) \equiv 0$; $n \geqslant 1$. Sie folgt aus der Konstanz von V auf der Kugeloberfläche. Da die Konstante C_i ist, so ist $Y_0 = C_i - \frac{e_i}{R_i}$. V wird also folgende Form haben:

1. Als Entwicklung um den Mittelpunkt der Kugel K_i:

$$V = C_i + e_i\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{R_i}\right) + \sum_1^\infty \left(\frac{r_i^n}{R_i^n} - \frac{R_i^{n+1}}{r_i^{n+1}}\right) Y_{n,i}(\Theta_i, \varphi_i). \tag{2}$$

2. Als Darstellung durch die Hauptteile:

$$V = \sum_1^m \left\{\frac{e_i}{r_i} - \sum_1^\infty \frac{R_i^{n+1}}{r_i^{n+1}} Y_{n,i}(\Theta_i, \varphi_i)\right\}. \tag{2a}$$

Formal läuft die Aufgabe darauf hinaus, die unbekannten Kugelfunktionen $Y_{n,i}$ zu bestimmen.

Die Potentiale der einzelnen Punktsysteme berechnen wir folgendermaßen: Das Potential der in den Mittelpunkten liegenden Ladungen $R_i C_i$ ist:

$$V_1 = \sum_1^m \frac{R_i C_i}{r_i}. \tag{3}$$

Es hat um den Mittelpunkt der Kugel K_i die Entwicklung:

$$V_1 = \frac{R_i C_i}{r_i} + \sum_0^\infty \frac{r_i^n}{R_i^n} X_{n,i}(\Theta_i, \varphi_i) \tag{3a}$$

($X_{n,i}$ sind Kugelfunktionen n-ter Ordnung).

Wir bilden die „erste Zusatzfunktion“:

$$Z_i^{(1)} = -\sum_0^\infty \frac{R_i^{n+1}}{r_i^{n+1}} X_{n,i}(\Theta_i, \varphi_i). \tag{4}$$

Sie ist das Potential derjenigen Punktladungen, die durch „Spiegelung" der Mittelpunktladungen der übrigen Kugeln an K_i entstanden sind. Denn die Summe $V_1 + Z_i^{(1)}$ nimmt auf der Oberfläche von K_i den konstanten Wert C_i an, man kann sie also ins Innere hinein nach dem Spiegelungsprinzip fortsetzen und findet in den Spiegelpunkten der außen liegenden Singularitäten die entsprechenden Punktladungen. Die Summe der auch für die anderen Kugeln analog gebildeten Zusatzfunktionen ist das Potential des zweiten Punksystems und wird dem ersten überlagert:

$$V_2 = V_1 + \sum_1^m Z_i^{(1)}.$$

Wir entwickeln $\sum_1^m{}' Z_j^{(1)}$ um den Mittelpunkt von K_i (das Komma bedeutet den Ausschluß des Index i bei der Summierung):

$$\sum_1^m{}' Z_j^{(1)} = \sum_0^\infty{}_n \frac{r_i^n}{R_j^n} X_{n,i}^{(1)}(\Theta_i, \varphi_i),$$

und bilden die zweite Zusatzfunktion:

$$Z_i^{(2)} = -\sum_0^\infty{}_n \frac{R_i^{n+1}}{r_i^{n+1}} X_{n,i}^{(1)}(\Theta_i, \varphi_i). \tag{5}$$

Die Summe der zweiten Zusatzfunktionen ist das Potential des dritten Punktsystems und wird den beiden ersten überlagert:

$$V_3 = V_2 + \sum_0^m Z_i^{(2)}.$$

So fährt man weiter fort. Im Falle der Konvergenz erhält man für V die folgende Reihe:

$$V = V_1 + \sum_1^\infty{}_n \sum_1^m{}_i Z_i^{(n)} = \sum_1^m{}_i \left\{ \frac{R_i C_i}{r_i} - \sum_0^\infty{}_n \frac{R_i^{n+1}}{r_i^{n+1}} Y_{n,i}(\Theta_i, \varphi_i) \right\} \tag{6}$$

und um den Mittelpunkt von K_i die Entwicklung:

$$V = \frac{R_i C_i}{r_i} + \sum_0^\infty{}_n \left(\frac{r_i^n}{R_i^n} - \frac{R_i^{n+1}}{r_i^{n+1}} \right) Y_{n,i}(\Theta_i, \varphi_i). \tag{6a}$$

Hier ist die Kugelfunktion $Y_{n,i}$ durch die Summe

$$Y_{n,i}(\Theta_i, \varphi_i) = \sum_0^\infty{}_\nu X_{n,i}^{(\nu)}(\Theta_i, \varphi_i)$$

bestimmt. Das Resultat entspricht vollkommen unseren Erwartungen, wenn man beachtet, daß $Y_0 = C_i - \frac{e_i}{R_i}$ ist. Die Rechnung besteht in der Fortsetzung von Entwicklungen nach Kugelfunktionen, welche durch die Methoden des § 1 ermöglicht wird.

Um die Konvergenz zu beweisen, führen wir unsere Rechnung auf das alternierende Verfahren zurück, dessen Konvergenz bewiesen ist. Man kann sie so beschreiben. Zuerst wurde die erste Randwertaufgabe für das Außengebiet jeder einzelnen Kugel K_i mit dem Randwert C_i gelöst. Die Summe dieser Lösungen (V_1) ergab auf jeder Kugeloberfläche die Randwerte $C_i + f_i$, wo f_i eine nicht konstante Oberflächenfunktion ist. Dann lösten wir für jede einzelne Kugel die erste Randwertaufgabe für das Außengebiet mit den Randwerten $-f_i$ $(Z_i^{(1)})$, erhielten durch Summierung der Lösungen auf den Kugeloberflächen wieder nicht konstante Randwerte $C_i + f_i^{(1)}$ und fuhren so weiter fort. Dieses ist das alternierende Verfahren [1]).

Das beschriebene Verfahren setzte die Kenntnis der Potentialwerte C_i voraus, während die Ladungen sich erst aus dem Resultat ergaben. Man kann auch umgekehrt davon ausgehen, daß die Ladungen gegeben sind. Die Methode bleibt im wesentlichen dieselbe. Man fügt zur ersten Annäherung, dem Potential der in den Mittelpunkten konzentrierten Ladungen e_i, in Form von Zusatzfunktionen sukzessiv die Potentiale von Dipolen hinzu und erhält die Potentialwerte C_i aus dem Resultat. Bei der Berechnung von Gitterpotentialen werden wir so verfahren.

Die induzierte Ladungsdichte auf jeder Kugel erhält man, indem man die Reihenentwicklung des Potentials nach der inneren Normalen ableitet und durch 4π dividiert.

Ähnlich wie im ersten Teil kann man auch hier die Lösung unseres Problems auf die Auflösung eines unendlichen Systems linearer Gleichungen zurückführen. Hier soll nicht näher darauf eingegangen werden. Nur der folgende Spezialfall läßt sich sofort erledigen. Wenn die Kugelmittelpunkte alle auf einer Achse liegen, so ist das Potential symmetrisch zu dieser Achse, es gelten für die analytische Fortsetzung der Reihen die Formeln (7a) und (10a) des § 1, und die ganze Rechnung verläuft wie im ebenen Fall. Auch der Beweis für die Existenz der Determinante des entsprechenden Gleichungssystems ist derselbe. Wir kommen im nächsten Paragraphen auf einen solchen Fall zurück.

[1]) Vgl. A. Korn, Potentialtheorie **1**, 354, 1899.

§ 4. Potentiale von Kugelgittern. Die Methode zur Berechnung der Potentiale unendlich ausgedehnter Kugelgitter unterscheidet sich von der eben behandelten nur dadurch, daß die Zahl der Kugeln unendlich ist. Der Übergang zur unendlichen Kugelzahl geschieht ebenso wie im ersten Teil. Es kommt auch hier in erster Linie darauf an, das Potential des Punktgitters erster Annäherung zu bestimmen, und zwar möglichst in einer Form, in welcher seine Zusammensetzung aus den Potentialen der einzelnen Punkte evident wird. Die Summe dieser Punktpotentiale konvergiert im allgemeinen nicht. Im ebenen Falle machten wir die entsprechende Summe durch konvergenzerzeugende Zusatzglieder konvergent und kamen so zur Darstellung des Punktpotentials durch den $\ln \sigma(z)$ bzw. $\ln \sin z$. In analoger Weise werden wir auch hier verfahren. In einer Reihe von Arbeiten [1]) gibt P. Appell zur Konstruktion der Potentiale von Punktgittern Methoden an, die auf der Hinzufügung von solchen Zusatzgliedern zur Erzeugung der Konvergenz beruhen. Wir werden uns im folgenden darauf stützen.

Es kann im Raume einfach-, doppelt- und dreifachperiodische Verteilungen von Kugeln geben. Ich will den ersten Fall an einem Beispiel ausführlich, die anderen nur ganz kurz behandeln.

A. Wir betrachten eine besonders einfache einfachperiodische Anordnung von Kugeln. Auf einer Geraden, der z-Achse des rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystems, liegen in gleichen Abständen a voneinander die Mittelpunkte von Kugelkonduktoren mit dem Radius 1 und der Ladung 1 ($a > 2$). Einer der Mittelpunkte befindet sich im Nullpunkt. Das elektrostatische Potential dieses Gitters ist zu berechnen.

Zur ersten Annäherung denken wir uns die Ladungen der Kugeln in ihren Mittelpunkten konzentriert und berechnen das Potential dieses Punktgitters. Durch Summierung der Einzelpotentiale läßt es sich nicht bilden, da ihre Summe divergiert. Appell zeigt in einer seiner Arbeiten [2]), daß man eine solche Reihe durch konvergenzerzeugende Zusatzglieder, die den Mittag-Lefflerschen bei der Darstellung analytischer Funktionen durch Potentialbruchreihen genau entsprechen, absolut konvergent machen kann. Dazu muß man die Einzelpotentiale

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + \eta^2 + (z - n\,a)^2}} \qquad n: 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

[1]) Journ. de math. (4) **3**, 5—52, 1887; Acta mathematica **4**, 353, 1884 und **8**, 265, 1888.

[2]) Journ. de math. (4) **3**, 8, 1887.

um den Nullpunkt in Reihen nach Kugelfunktionen entwickeln und von jedem einzelnen eine gewisse Anzahl seiner Entwicklungsglieder abziehen. Diese Anzahl ist durch die Forderung bestimmt, daß die Summe der so verkleinerten Potentiale absolut konvergieren soll. In unserem Falle genügt es, wie Appell zeigt, das erste Glied der Entwicklung, die Konstante, von jedem Partialbruch, den ersten ausgenommen, abzuziehen. Man erhält die absolut konvergente Reihe:

$$V_1(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{+\sqrt{x^2 + y^2 + (z - na)^2}} - \frac{1}{+\sqrt{n^2 a^2}} \right). \qquad (1)$$

Die Funktion V_1 ist periodisch in der Variablen z mit der Periode a. Wir definieren sie als die erste Annäherung für das gesuchte Potential, das sich in großer Entfernung von der z-Achse wie V_1 verhalten soll. Wir entwickeln V_1 um den Nullpunkt in eine Reihe nach Kugelfunktionen, führen dazu Polarkoordinaten ein: $r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $z = r \cos \Theta$ und bekommen wegen der Symmetrie des Potentials zur z-Achse eine nach gewöhnlichen Kugelfunktionen ansteigende Reihe:

$$V_1 = \frac{1}{r} + a_2 r^2 P_2(\cos\Theta) + a_4 r^4 P_4(\cos\Theta) + a_6 r^6 P_6(\cos\Theta) + \cdots \quad (1\,a)$$

Bei der Entwicklung fallen die Glieder ungerader Ordnung heraus. $a_{2n} = \frac{2}{a^{2n}} s_{2n+1}$; $s_{2n+1} = \sum_1^\infty \frac{1}{m^{2n+1}}$ [1]). Um jeden anderen Kugelmittelpunkt lautet die Entwicklung wegen der Periodizität ebenso.

Um die Summe der ersten Zusatzfunktionen zu bilden, muß man die Reihe

$$-\left(\frac{a_2}{r^3} P_2(\cos\Theta) + \frac{a_4}{r^5} P_4(\cos\Theta) + \cdots \right)$$

und die entsprechend gebildeten Reihen für die anderen Kugelmittelpunkte summieren. Nach Formel (13) des § 1 bedeutet das, daß man die geraden Ableitungen von V_1 in der Richtung der z-Achse nacheinander mit $-\frac{a_{2n}}{2n!}$ multipliziert und addiert:

$$Z_1 = -\left\{ \frac{a_2}{2!} \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} + \frac{a_4}{4!} \frac{\partial^4 V_1}{\partial z^4} + \cdots + \frac{a_{2n}}{2n!} \frac{\partial^{2n} V_1}{\partial z^{2n}} + \cdots \right\}. \qquad (2)$$

[1]) Über die Werte dieser Summen: T. J. Stieltjes. Acta math. **10**, 299, 1887.

Jetzt muß man nach § 3 Z_1 um jeden Kugelmittelpunkt (hier genügt wegen der Periodizität der Nullpunkt) in eine Reihe entwickeln und in derselben Art die Summe der zweiten Zusatzfunktionen Z_2 bilden. Da Z_1 sich aus den Ableitungen von V_1 zusammensetzt, muß man die Reihe (1a) in der Richtung der z-Achse differenzieren (mit Hilfe der Formeln (11) und (12) des § 1) und mit den entsprechenden Koeffizienten multiplizieren. Man erhält so für Z_1 die Entwicklung:

$$Z_1 = -\left(\frac{a_2}{r^3} P_2(\cos\Theta) + \frac{a_4}{r^5} P_4(\cos\Theta) + \cdots\right) + a_0^{(1)} + a_2^{(1)} r^2 P_2(\cos\Theta) + a_4^{(1)} r^4 P_4(\cos\Theta) + \cdots \quad (2a)$$

Die neuen Koeffizienten $a_{2n}^{(1)}$ setzen sich aus den alten in folgender Weise zusammen:

$$-a_{2n}^{(1)} = \binom{2n+2}{2} a_2 a_{2n+2} + \binom{2n+4}{4} a_4 a_{2n+4} + \cdots \quad (3)$$

Die Summe der zweiten Zusatzfunktionen ist:

$$Z_2 = -\left\{\frac{a_2^{(1)}}{2!}\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} + \frac{a_4^{(1)}}{4!}\frac{\partial^4 V_1}{\partial z^4} + \cdots\right\} \quad (4)$$

und hat um den Nullpunkt die Entwicklung:

$$Z_2 = -\left(\frac{a_2^{(1)}}{r^3} P_2(\cos\Theta) + \frac{a_4^{(1)}}{r^5} P_4(\cos\Theta) + \cdots\right) + a_0^{(2)} + a_2^{(2)} r^2 P_2(\cos\Theta) + a_4^{(2)} r^4 P_4(\cos\Theta) + \cdots, \quad (4a)$$

in welcher die Koeffizienten $a_{2n}^{(2)}$ aus den vorigen nach demselben Schema gebildet werden:

$$-a_{2n}^{(2)} = \binom{2n+2}{2} a_2^{(1)} a_{2n+2} + \binom{2n+4}{4} a_4^{(1)} a_{2n+4} + \cdots \quad (3a)$$

So fährt man weiter fort und erhält im Falle der Konvergenz das Potential:

$$V = V_1 - \frac{A^2}{2!}\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} - \frac{A_4}{4!}\frac{\partial^4 V_1}{\partial z^4} - \frac{A_6}{6!}\frac{\partial^6 V_1}{\partial z^6} - \cdots \quad (5)$$

mit der Entwicklung im Nullpunkt:

$$V = \frac{1}{r} + A_0 + A_2\left(r^2 - \frac{1}{r^3}\right) P_2(\cos\Theta) + A_4\left(r^4 - \frac{1}{r^5}\right) P_4(\cos\Theta) + \cdots \quad (5a)$$

Die Koeffizienten A_{2n} sind durch die Summen $A_{2n} = \sum_0^\infty a_{2n}^{(\nu)}$ bestimmt und die $a_{2n}^{(\nu)}$ sind nach folgendem Schema gebildet:

$$-a_{2n}^{(\nu)} = \binom{2n+2}{2} a_2^{(\nu-1)} a_{2n+2} + \binom{2n+4}{4} a_4^{(\nu-1)} a_{2n+4} + \cdots \quad (3b)$$

Die ganze Darstellung gleicht fast wörtlich der entsprechenden im ersten Teil. Sie läßt sich ebenso auf die Lösung eines unendlichen Gleichungssystems durch die Neumannsche Reihe zurückführen, und man kann dieselben Konvergenzbetrachtungen anstellen.

B. Bei zwei- und dreidimensionalen Kugelgittern ist die Methode zur Berechnung des Potentials im wesentlichen dieselbe, die praktischen Schwierigkeiten sind allerdings sehr viel größer.

Zuerst bestimmt man das Potential des Punktgitters erster Annäherung V_1 und muß bei zweidimensionalen Gittern von jedem Einzelpotential zwei Glieder seiner Entwicklung um den Nullpunkt, bei dreidimensionalen drei solche Glieder abziehen, um die absolute Konvergenz zu erzwingen. Periodische Potentiale dreidimensionaler Punktgitter sind überhaupt nur dann möglich, wenn die Ladungen sich in periodisch wiederkehrenden Räumen aufheben [1]).

Dann bestimmt man die Entwicklungen von V_1 um die einzelnen Kugelmittelpunkte des Periodenparallelogramms (bzw. Parallelepipedons), bildet für jedes der letzteren die einzelnen Zusatzfunktionen und summiert sie. Die Summe dieser Zusatzfunktionen entwickelt man wieder um die Kugelmittelpunkte, bildet das zweite System von Zusatzfunktionen und fährt so fort. Die Berechnung der Entwicklungen wird durch die Methoden des § 1 ermöglicht.

Die Analogie zum ebenen Problem läßt sich auch in der Form am besten aufrecht erhalten, wenn man von der Darstellung der Funktion $\frac{1}{r^{n+1}} X_n(\Theta, \varphi)$ als Differentialquotient von $\frac{1}{r}$ ausgeht:

$$\frac{1}{r^{n+1}} X_n(\Theta, \varphi) = C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1 \partial \nu_2 \dots \partial \nu_n}.$$

Dann lassen sich auch die Zusatzfunktionen als Summen über die Ableitungen von V_1 (oder gewisser Bestandteile von V_1) in verschiedenen Richtungen darstellen und man bekommt im Resultat ähnliche Reihen wie (5), nur daß im allgemeinen in verschiedenen Richtungen differenziert ist.

[1]) l. c. S. 34; Journ. de math. (4) **3**, 5—52, 1887; Acta mathematica **4**, 353, 1884 und **8**, 265, 1888.

Lebenslauf

Ich bin am 31. März 1898 in Ermes-Pastorat in Livland geboren. Meine Schulbildung erhielt ich im livländischen ritterschaftlichen Landesgymnasium zu Birkenruh bei Wenden und bestand 1917 in Dorpat die Reifeprüfung. 1918 bis 1921 diente ich im deutschen Heer und in der Baltischen Landeswehr. 1921 bis 1924 studierte ich in Riga am Herder-Institut und an der lettländischen Universität Mathematik und Physik und bestand an letzterer 1924 das Staatsexamen. Im Sommersemester 1923 und Wintersemester 1924/25 studierte ich an der Universität Marburg. Im Laufe meines Studiums besuchte ich Praktika und Vorlesungen bei folgenden Herren Professoren und Dozenten: In Riga: Meyer, Meder, Kupffer, Lejneek, Trey; in Marburg: E. Neumann, Hensel, Fraenkel, Schaefer, Schulze.